

Aufgabenblatt zu Kap. 7 – Übungen

Für die folgenden Übungen zu den 4 Hauptkapiteln der „Einführung in die Matrix-Algebra mit Derive“ deklarieren Sie in *Derive* zunächst folgende 4 2×2 -Matrizen und 3 2×1 -Vektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; & \mathbf{B}_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; & \mathbf{C}_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; & \mathbf{D}_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_{2 \times 1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; & \mathbf{w}_{2 \times 1} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; & \mathbf{x}_{2 \times 1} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Die Elemente von \mathbf{A} und \mathbf{x} müssen vorher in Leer-Definitionen vereinbart werden.) Außer diesen 7 Definitionen löschen Sie alle anderen Ausdrücke im Algebra-Fenster, so dass es folgendermaßen aussieht:

```
#1:  A := [ a11 a12 ]
      [ a21 a22 ]

#2:  B := [ 1 0 ]
      [ 2 0 ]

#3:  C := [ 1 0 ]
      [ 1 1 ]

#4:  D := [ 0 1 ]
      [ 1 0 ]

#5:  v := [ 1 ]
      [ 0 ]

#6:  w := [ -1 ]
      [ -1 ]

#7:  x := [ x1 ]
      [ x2 ]
```

Nullmatrizen, Nullvektoren und Einvektoren erzeugen Sie *just in time* durch Verwendung der entsprechenden Funktionen aus der Funktionssammlung *EMAD.mth*.

7.1 Matrix-Operationen (Kap. 4)

Zunächst soll demonstriert werden, dass das Produkt einer Matrix mit ihrer Transponierten stets eine symmetrische Matrix ergibt.

Berechnen Sie die 4 Produkte

$$\mathbf{AA}'; \quad \mathbf{BB}'; \quad \mathbf{CC}'; \quad \mathbf{DD}'$$

und überzeugen Sie sich davon, dass die Elemente der Ergebnismatrizen jeweils achsensymmetrisch zur Hauptdiagonale angeordnet sind, was bei einer 2×2 -Matrix gleichbedeutend damit ist, dass die beiden Elemente außerhalb der Hauptdiagonale identisch sind. Die Matrix A steht dabei für den allgemeinen Fall einer beliebigen 2×2 -Matrix, bei der trotzdem sehr gut die Symmetrie zu erkennen ist.

In allen 4 Fällen wurde die jeweilige Matrix *von rechts* mit ihrer Transponierten multipliziert, also z.B. AA' . Wenn die Matrizen *von links* mit ihren Transponierten multipliziert werden, also z.B. $A'A$, so entstehen ebenfalls symmetrische 2×2 -Matrizen (probieren Sie es aus!), und zwar für A , B und C andere als eben, während man bei der Matrix D feststellt, dass $DD' = D'D$ ist.

Berechnen Sie nun bei den Vektoren jeweils beide Produkte (die Ergebnisse sind in diesen Fällen von unterschiedlicher Dimension). Berechnen Sie also

$$v'v; vv'; w'w; ww'; x'x; xx'$$

Die Produkte $v'v, w'w$ und $x'x$ ergeben jeweils eine 1×1 -Matrix (bzw. einen Skalar). In Ermangelung von Elementen außerhalb der Hauptdiagonale sind 1×1 -Matrizen (bzw. Skalare) stets symmetrisch. Auch die Produkte vv', ww' und xx' ergeben symmetrische Matrizen (in diesem Fall der Dimension 2×2).

7.2 Spezielle Matrizen (Kap. 3 & 5)

Laden Sie zunächst die Funktionssammlung *EMAD.mth* in das Algebra-Fenster und erzeugen Sie mit der 1-Funktion einen 2×1 -Einsvektor, mit der o-Funktion einen 2×1 -Nullvektor und mit der 0-Funktion eine 2×2 -Nullmatrix:

```
#1:  LOAD(C:\Programme\TI Education\Derive 6\Math\EMAD.mth)

#2:                                     1(2) =  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 

#3:                                     o(2) =  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 

#4:                                     0(2, 2) =  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 
```

Überprüfen Sie nun, ob die Produkte

$$A1 \text{ und } 1'B$$

die Zeilensummen von A bzw. die Spaltensummen von B , sowie die Produkte

$$w'1 \text{ und } 1'x$$

die Summen der Elemente von w bzw. x ergeben (1 bezeichnet den 2×1 -Einsvektor, den Sie jedes Mal *just in time* mittels $1(2)$ erzeugen).

Berechnen Sie als Nächstes die Produkte

$$AO, Ov, w'o \text{ und } o'x$$

(O bezeichnet die 2×2 -Nullmatrix und o den 2×1 -Nullvektor, die Sie wieder *just in time* mittels $0(2,2)$ bzw. $o(2)$ erzeugen), und überzeugen Sie sich, dass das Ergebnis jedes Mal Null ist, und zwar in Form einer Nullmatrix, eines Nullvektors oder der reellen Zahl 0.

Betrachten Sie nun noch einmal die 3 Matrizen B , C und D etwas näher. Markieren Sie in der folgenden Tabelle, welche dieser Matrizen Diagonal- bzw. Dreiecksmatrizen sind und welche symmetrisch, idempotent und/oder orthogonal sind.

	$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Diagonalmatrix			
Dreiecksmatrix			
symmetrische Matrix			
idempotente Matrix			
orthogonale Matrix			

Dabei sollten Sie in den ersten beiden Zeilen die „Methode des scharfen Hinsehens“ verwenden, also ohne *Derive* auskommen. Bei den restlichen drei Zeilen der Tabelle sollten Sie *Derive* verwenden, wobei Sie jeweils die Wahl haben zwischen einer eigenen Berechnung (bei Symmetrie gilt $A' = A$, bei Idempotenz $AA = A$ und bei Orthogonalität $A' = A^{-1}$) und der Verwendung der Funktionen *STEST*, *ITEST* oder *OTEST*. Bilden Sie abschließend noch aus der Matrix C und den Vektoren v und x ein lineares Gleichungssystem

$$Cx = v$$

Eine solche Matrixgleichung kann leicht gelöst werden, wenn die Koeffizientenmatrix C eine reguläre Matrix ist. Da C diese Eigenschaft hat, können Sie ihre Inverse mit *Derive* berechnen:

#5:	$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	
#6:		$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Das lineare Gleichungssystem $Cx = v$ kann nun nach x aufgelöst werden, indem es von links mit der Inversen von C multipliziert wird:

$$Cx = v \Leftrightarrow \underbrace{C^{-1}C}_I x = C^{-1}v \Leftrightarrow Ix = C^{-1}v \Leftrightarrow x = C^{-1}v$$

Berechnen Sie den Lösungsvektor (indem Sie den Vektor v von links mit der Inversen von C multiplizieren) und überprüfen Sie außerdem, ob die beiden Produkte $C^{-1}C$ und CC^{-1} gleich der Einheitsmatrix sind.

7.3 Maßzahlen (Kap. 6)

Berechnen Sie Spur, Determinante und Rang für alle 4 Beispielmatrizen und übertragen Sie die Ergebnisse in folgende Tabelle:

	$\text{tr}(\bullet)$	$\det(\bullet)$	$r(\bullet)$
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$			
$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$			
$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$			
$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$			

Welche Matrizen sind von vollem Rang und haben folglich eine von 0 verschiedene Determinante? Überprüfen Sie außerdem, ob bei der Matrix B tatsächlich Spur und Rang übereinstimmen, da diese beiden Maßzahlen bei einer idempotenten Matrix stets gleich sein müssen.

Berechnen Sie nun noch 5 Produkte der Form *Vektor mal transponierter Vektor* und bestimmen Sie jeweils Spur, Determinante und Rang. Sie werden feststellen, dass bei allen 5 Matrizen die Determinante 0 und der Rang 1 ist, weil das Produkt eines Vektors mit einem transponierten Vektor stets eine singuläre Matrix (vom Rang 1) ergibt.

	$\text{tr}(\bullet)$	$\det(\bullet)$	$r(\bullet)$
$vv' = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$			
$ww' = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$			
$xx' = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$			
$vw' = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$			
$xw' = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$			